Lycée Laymoun — 2ème BAC Pro

Les nombres complexes
1er partie

1 Représentation des nombres complexes :

Déf : 1) on note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nbres complexes

2) Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tq : $\boxed{i^2 = -1}$

3) Tout élét : z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique : $\boxed{z = a + ib}$ avec : a ; b sont réels.

4) on note :

$$\begin{cases} a = Re(z) & \text{la partie réelle de } z \\ b = Im(z) & \text{la partie imaginaire de } z \end{cases}$$

- si $a = 0$; z est appelé imag pur.
- si $b = 0$; z est un nbre réel.
- $a + ib$ est **l'écriture algébrique** de z.

Exple : | $Re(3 - \frac{2}{5}i) =$
| $Im(3 - \frac{2}{5}i) =$

2 Règles de calcul :

soient $z = a + ib$; $z' = a' + ib'$ deux nbrs complx

◇ Egalité : $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$

◇ Somme $z + z' = (a + a') + i(b + b')$

◇ produit $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

◇ Inverse : $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i\left(\frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$

◇ quotient : $\frac{z}{z'} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{a'^2 + b'^2}$

Ex : 1 Ecrire sous la forme $x + iy$:

1°/ $\frac{1 + i}{i}$ 4°/ $\frac{i}{i + 1}$ 7°/ $\frac{3}{i+1} - \frac{1}{2i}$

2°/ $\frac{i - 4}{2i}$ 5°/ $\frac{3 + 4i}{i - 1}$

3°/ $\frac{2}{4 - i}$ 6°/ $\frac{i - 3}{i + 3}$

3 Conjugué d'1 nbre complexe

Déf : on appelle conjugué de $z = a + ib$; le nombre complexe noté $\bar{z}$ tq : $\boxed{\bar{z} = a - ib}$

Prop : $z = a + ib$; $z' = a' + ib'$

$z = z' \Leftrightarrow \bar{z} = \bar{z'}$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{(\bar{z})} = z$

$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

si $z' \neq 0$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

En particulier :

$z + \bar{z} = 2 \times Re(z)$; $z - \bar{z} = 2i\,Im(z)$

z imagin pur $\Leftrightarrow$ $\boxed{z + \bar{z} = 0}$

z réel $\Leftrightarrow$ $\boxed{z = \bar{z}}$

4 Le plan Complexe :

On muni le plan d'1 repère orthonormé $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$

$z = x + iy$ est représenté par le pt : $M(x ; y)$. on dit que :

M est **l'image** de z et que :

z est **l'affixe** du pt M :

M(x, y)
y
$\vec{e_2}$
l'axe réel
O
$\vec{e_1}$
x
l'axe des imaginaires

⑤ Module d'un nombre complexe.

Déf le module de $z = a+ib$ c'est : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Prop : $|z| = \sqrt{z \times \bar{z}}$

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

$|z+z'| \leq |z| + |z'|$

$|z \times z'| = |z| \times |z'|$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ (avec : $z \neq 0$)

Ex : 21 Calculer le module de :

$z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1+\sqrt{2}-5i$

$z_3 = z_1 \times z_2$

⑥ Argument d'un nobre complx non nul

Soit $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ et M son image. L'argument θ de z est l'un des mesure de l'angle $(\widehat{\vec{e_1}; \vec{OM}})$.

On le note : arg(z) et on écrit :

$$\arg(z) \equiv \theta \ [2\pi]$$

⑦ La forme trigonométrique et la notation exponentielle d'un complx ≠ 0.

Soit $z \in \mathbb{C}$; $z \neq 0$.

on pose : $r = |z|$ et $\operatorname{Arg}(z) \equiv \theta [2\pi]$

- La forme trigonométrique de z c'est :

$$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = [r ; \theta]$$

- La notation exponentielle de z c'est :

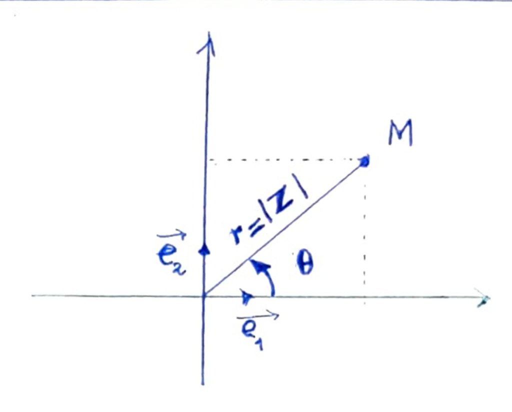
$$z = re^{i\theta}$$

Req : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$

⚠ Cas particuliers :

si $a \in \mathbb{R}^*$ alors :

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a ; 0]$ $ai = [a ; \frac{\pi}{2}]$	$a = [-a ; \pi]$ $ai = [-a ; -\frac{\pi}{2}]$



EX : 31 ① Calculer l'argument de :

$z_1 = i$; $z_2 = 1$; $z_3 = -1$

$z_4 = i^3$; $z_5 = z_1 \times z_2 \times z_3 \times z_4$

② Donner la forme trigonométrique de :

$z_1 = i$; $z_2 = 3$; $z_3 = (2i)^3$

$z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $z_5 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_7 = -\frac{\sqrt{5}}{3} i$

Req : pour trouver la forme trigonométrique de $z = x+iy$ on calcul r et θ

avec : $r = \sqrt{x^2+y^2}$

θ est determin dès qu'on calcul

$\sin(\theta) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

et en utilisant le tableau :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin(θ)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos(θ)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{8}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1